Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

## 10

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

УДК 373:512+373(517)
ББК 22.14я721+22.161я721
М34

**Авторы:**
Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова,
М. И. Шабунин

На учебник получены **положительные** заключения
**научной** (заключение РАО № 476 от 14.11.2016 г.),
**педагогической** (заключение РАО № 165 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 159-ОЭ от 22.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

М34 **Математика :** алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни : издание в pdf-формате / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — 10-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 384 с. : ил.

ISBN 978-5-09-101569-0 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-087550-9 (печ. изд.).

Данный учебник является первой частью комплекта учебников «Алгебра и начала математического анализа» для 10 и 11 классов. В этих учебниках изложены, по принципу структурного вложения, фактически два курса, соответствующие стандартам образования: один на базовом, другой на углублённом уровне.

Комплект обладает свойством преемственности со всеми действующими учебниками алгебры основной школы. Наилучшие преемственные связи установлены с комплектом учебников алгебры для 7—9 классов авторов Ю. М. Колягина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунина.

В учебнике содержится избыточная разноуровневая система задач и упражнений (многие задачи приведены с решениями и указаниями), позволяющая успешно подготовиться к ЕГЭ. Практическая, прикладная и мировоззренческая направленность курса обеспечивает понимание роли математики во всех сферах деятельности человека.

**УДК 373:512+373(517)**
**ББК 22.14я721+22.161я721**

**ISBN 978-5-09-101569-0 (электр. изд.)**
**ISBN 978-5-09-087550-9 (печ. изд.)**

# Оглавление

Глава I

# Алгебра 7 – 9 классов (повторение)

*Математическая наука, в моём понимании, есть неделимое целое, организм, жизненность которого обусловлена связью его частей.*

*Д. Гильберт*

Материал этой главы посвящён повторению курса алгебры основной школы. Повторяя различные разделы ранее изученного курса (решение уравнений и неравенств, исследование функций, преобразование алгебраических выражений), вы поймёте, о чём говорил признанный в начале XX в. мировым лидером всех математиков немецкий учёный Давид Гильберт (см. эпиграф к главе).

Предложенный материал изложен таким образом, что будет понятен и полезен всем учащимся независимо от того, по каким учебникам алгебры они обучались в 7—9 классах. Каждый параграф главы посвящён повторению большой темы; в нём кратко излагаются ранее изученные теоретические положения, разбираются решения задач на применение этих положений, приводятся упражнения для восстановления практических умений по теме. Наряду со стандартными упражнениями в этой главе рассматриваются задачи с параметрами. Такого типа задачи предлагаются на итоговой аттестации в группе задач уровня «С», хотя для их решения достаточно знаний основной школы.

Вопросы комбинаторики и теории вероятностей в данной главе не повторяются, так как в учебнике 11 класса они излагаются подробно, с напоминанием материала, входившего в программу 7—9 классов.

К материалу этой главы вы можете возращаться неоднократно в течение всего учебного года, особенно если нужно вспомнить определения понятий, на которые опирается новый материал. Для удобства поиска нужного термина пользуйтесь «Предметным указателем», помещённым в конце учебника.

# § 1. Алгебраические выражения

## 1. Алгебраическая сумма

*Алгебраическая сумма* — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединённых знаком «+» или «–».

Задача 1. В выражении $a + (b - (c + d - 5))$ раскрыть скобки.

▷ $a + (b - (c + d - 5)) = a + (b - c - d + 5) = a + b - c - d + 5$. ◀

## 2. Степень с натуральным и целым показателями

Степень числа $a$ с натуральным показателем $n$, большим единицы, — это произведение $n$ множителей, равных $a$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ множителей}}, \quad a^1 = a,$$

где $a$ — основание степени, $n$ — показатель степени, $a^n$ — степень.

Например:

$$\left(-1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3} = -\frac{64}{27} = -2\frac{10}{27}.$$

Если $a \neq 0$ и $n$ — натуральное число, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Например:

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}; \quad (-3)^0 = 1.$$

Свойства степени с целым показателем ($a \neq 0,\ b \neq 0$)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{m\cdot n}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

Например, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5} : \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5-(-2)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5+2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{27}{8}; \quad (3^2)^{-3} = 3^{2\cdot(-3)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}.$$

Задача 2. Найти значение выражения $\dfrac{(a^5)^2 \cdot a^3}{a^4 \cdot a^6}$ при $a = -0{,}4$.

▷ $$\frac{(a^5)^2 \cdot a^3}{a^4 \cdot a^6} = \frac{a^{5\cdot2} \cdot a^3}{a^{4+6}} = \frac{a^{10} \cdot a^3}{a^{10}} = \frac{a^{13}}{a^{10}} = a^{13-10} = a^3;$$

если $a = -0{,}4$, то $a^3 = (-0{,}4)^3 = -0{,}064$. ◀

Запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant |a| < 10$ и $n$ — целое число, называется *стандартным видом числа*.

**Задача 3.** Записать в стандартном виде каждое из чисел: 320; 0,006.

▷ $320 = 3{,}2 \cdot 100 = 3{,}2 \cdot 10^2$; $0{,}006 = \frac{6}{1000} = \frac{6}{10^3} = 6 \cdot 10^{-3}$. ◀

## 3. Одночлены и многочлены

*Одночлен* — произведение числовых и буквенных множителей, являющихся степенями с натуральными показателями. Буквы, их степени и числа также являются одночленами.

Примеры одночленов: $2bc$, $-3a^2 \cdot 2ab$, $a$, $\frac{2}{5}$.

*Одночлен стандартного вида* — это одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и натуральные степени буквенных множителей с различными основаниями (порядок расположения этих множителей не имеет значения).

*Коэффициент одночлена* — числовой множитель одночлена, приведённого к стандартному виду.

**Задача 4.** Найти коэффициент одночлена $7x \cdot 8x^2y$.

▷ Запишем данный одночлен в стандартном виде: $7x \cdot 8x^2y = 56x^3y$. Его коэффициент равен 56. ◀

*Многочлен* — алгебраическая сумма нескольких одночленов. Одночлен является частным случаем многочлена.

Примеры многочленов: $2a$ — одночлен, $3a - b^2$ — двучлен, $\frac{1}{2}x^2 - 4xy + 4y^3$ — трёхчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых он состоит.

*Подобные члены* многочлена — это одночлены, записанные в стандартном виде и отличающиеся только коэффициентами, либо одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом.

*Стандартный вид* многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

**Задача 5.** Записать в виде многочлена стандартного вида произведение $\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (2a^2 - 4a + 3)$.

▷ $$\left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (2a^2 - 4a + 3) = a \cdot 2a^2 + a \cdot (-4a) + a \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2a^2 +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4a) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 2a^3 - \underline{4a^2} + \underline{\underline{3a}} - \underline{a^2} + \underline{\underline{2a}} - \frac{3}{2} = 2a^3 - 5a^2 +$$

$$+ 5a - 1\frac{1}{2}.$$ ◀

## 4. Формулы сокращённого умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (*квадрат суммы*);
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (*квадрат разности*);
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (*разность квадратов*);
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (*куб суммы*);
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (*куб разности*);
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (*разность кубов*);
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (*сумма кубов*).

Например, с помощью формул сокращённого умножения степень двучлена можно кратчайшим способом записать в виде многочлена стандартного вида:

1) $\left(\frac{1}{3} - a^5\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 a^5 + 3 \cdot \frac{1}{3}(a^5)^2 - (a^5)^3 = \frac{1}{27} - \frac{1}{3}a^5 +$
$+ a^{10} - a^{15}$;

2) $(-2x - y)^2 = (-(2x+y))^2 = (2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

__Задача 6.__ Используя формулы сокращённого умножения, представить $4a^6 - b^2c^6$ в виде произведения многочленов.

▷ $4a^6 - b^2c^6 = (2a^3)^2 - (bc^3)^2 = (2a^3 - bc^3)(2a^3 + bc^3)$. ◀

При разложении многочлена на множители полезно соблюдать следующий порядок:
1) вынести за скобки общий множитель — одночлен (если он есть);
2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращённого умножения;
3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Примеры разложения многочлена на множители:

1) с помощью вынесения общего множителя за скобки: $2x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y^2 = xy^2(2xy - 3 + x^2)$;

2) с использованием вынесения за скобки общего множителя и последующим применением формулы разности квадратов: $4a^3 - a = a(4a^2 - 1) = a(2a-1)(2a+1)$;

3) с применением способа группировки:
$8ac - 3b + 2a - 12bc = (8ac + 2a) + (-3b - 12bc) =$
$= 2a(4c+1) - 3b(1+4c) = (1+4c)(2a-3b)$.

## 5. Алгебраические дроби

*Алгебраическая дробь* — это дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами.

*Основное свойство дроби* можно записать так:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}, \text{ где } b \neq 0,\ m \neq 0.$$

Основное свойство дроби позволяет сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя.

Например:

$$\frac{4x^3 - xy^2}{2x+y} = \frac{x(4x^2 - y^2)}{2x+y} = \frac{x(2x-y)(2x+y)}{2x+y} = x(2x-y).$$

<u>Действия с алгебраическими дробями</u>

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Рассмотрим примеры действий с алгебраическими дробями:

1) $$\frac{2}{b-2} - \frac{b}{4-b^2} = \frac{2}{b-2} - \frac{b}{(2-b)(2+b)} = \frac{2^{\backslash 2+b}}{b-2} + \frac{b^{\backslash 1}}{(b-2)(2+b)} =$$

$$= \frac{2(2+b)+b}{(b-2)(2+b)} = \frac{4+2b+b}{(b-2)(b+2)} = \frac{4+3b}{b^2-4};$$

2) $$\frac{x^2-y^2}{12x^2} \cdot \frac{3x}{y-x} = \frac{(x^2-y^2)\cdot 3x}{12x^2 \cdot (y-x)} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-y)}}(x+y)\cdot \overset{1}{\cancel{3x}}}{-4x \cdot \underset{1}{\cancel{3x}} \cdot \underset{1}{\cancel{(x-y)}}} = -\frac{x+y}{4x}.$$

## Упражнения

**1.** Найти числовое значение выражения, предварительно упростив его:

1) $5a - (2b - 3a) - b$ при $a = 0{,}8$, $b = -1{,}2$;

2) $(3x - 5y) - (-x + 2y - 3)$ при $x = -\frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{14}$.

**2.** Найти значение выражения:

1) $\frac{a^{21} \cdot a^{13}}{a^{31}}$ при $a = 1{,}6$; $a = -0{,}11$;

2) $\frac{n^{48}}{n^{19} \cdot n^{26}}$ при $n = 0{,}3$; $n = -0{,}4$.

**3.** Выполнить действия:

1) $\left(-\frac{2}{3}a^2b^6c\right)^3 \cdot 9a^5bc^2$;  2) $12x^2yz^7\ (0{,}5x^3y^8)^2$;

3) $(36m^8n^2k) : (12m^2n)$;  4) $\left(-\frac{5}{9}a^9b^8c^7\right) : (5a^3b^3c)$.

**4.** Записать в стандартном виде многочлен:

1) $5a^3b - 3ab^2 + 4ab^2 - 7a^3b$;

2) $2xy^2x^3 - 3xyxy + 8x^2y^2x^2 - 14$;

3) $1\frac{1}{3}ab(-6a^2b) - 0{,}7a^3 \cdot 20b - b^2 \cdot 7a^3$.

**5.** Найти произведение многочлена и одночлена:

1) $5n\left(0{,}2n - 2n^2 - \frac{1}{3}p\right)$;  2) $\left(4x - 1\frac{1}{3}xy - 2y\right)\left(-1\frac{1}{2}x^2\right)$.

**6.** Разделить многочлен на одночлен:

1) $(8x^3 - 4x^2 + 6x) : (-2x)$;  2) $(5ab^2 - 14a^2b^2 - 3a^3b) : (2ab)$.

**7.** Умножить многочлен на многочлен:

1) $(2a - 0{,}3b)(3a + 5b - 1)$; 2) $(x - 3)(-x^2 - 2x + 3)$.

**8.** Возвести в степень, пользуясь формулами сокращённого умножения:

1) $\left(1\frac{1}{3} + 3n\right)^2$; 2) $(0{,}4a^2 - 5b)^2$; 3) $(-3p + 10q)^2$;

4) $(-6k - 0{,}5n)^2$; 5) $(a^2 + 4)^3$; 6) $(0{,}2 - b)^3$;

7) $(-3 - x)^3$; 8) $\left(-\frac{1}{3} + a\right)^3$; 9) $((2 - x)(2 + x))^2$.

**9.** Представить данный многочлен в виде произведения, применив формулы сокращённого умножения:

1) $x^8 - 4$; 2) $25n^2 - 49p^4$;

3) $1\frac{9}{16}a^2 - 0{,}09b^2$; 4) $0{,}0081x^6 - 1\frac{7}{9}y^{10}$.

**10.** Разложить многочлен на множители:

1) $3a^2 + 12ab + 12b^2$; 2) $6a^3b^2 - 36a^2b^3 + 54ab^4$;

3) $a^2 - 2ab + 5a - 10b$; 4) $a^3 - 3b + a^2b - 3a$;

5) $a^5 + 3a^3 - 8a^2 - 24$; 6) $a^2 - 3a + b^2 + 3b - 2ab$.

**11.** Сократить дробь:

1) $\frac{12a^2b^3c^5}{27a^4b^3c^2}$; 2) $\frac{a^7(a-b)^2}{a^4(a-b)^3}$; 3) $\frac{2a+6}{a^2-9}$;

4) $\frac{(m-2n)^2}{10n-5m}$; 5) $\frac{a^2-4}{a^3+8}$; 6) $\frac{8a^3-27}{9-4a^2}$.

**12.** Выполнить действия:

1) $\frac{3x+5}{x-2} - \frac{11-x}{x-2}$; 2) $\frac{2a}{a-b} + \frac{2a-b}{b-a}$; 3) $\frac{3}{a} + 5 - \frac{2}{a-b}$;

4) $\frac{3a}{6a+8} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4-3a}$; 5) $\frac{5b-b^2}{3a} \cdot \frac{6a^2}{b^3-5b^2}$; 6) $\frac{6c^3}{9-a^2} \cdot \frac{a^3-6a+9}{4a^2c}$;

7) $\frac{a^3b}{3a-6b} : \frac{a^2b^2-a^2b}{ac-2bc}$; 8) $\frac{10-15b}{(a-b)^2} : \frac{9b^2-4}{3b-3a}$;

9) $\left(\frac{a}{7a-4} - \frac{1}{a+3}\right) \cdot \frac{12-21a}{(2-a)^2}$; 10) $\left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+4}{4-x^2}\right) : \frac{2x+x^2}{(2-x)^2}$.

**13.** Вычислить:

1) $2^3 - 2^0 - 2^{-3} + (-2)^3 + (-2)^{-3}$; 2) $\frac{3^{-3} \cdot 3^5}{3^3} + \left(3^{-1}\right)^2 - \left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2$.

**14.** Представить в виде степени:

1) $\frac{a^2 \cdot a^{-5}}{a^3}$; 2) $\frac{b^{-4} \cdot b^8}{b^6}$; 3) $a^{-6}b^3$; 4) $c^{-5}d^{-10}$.

**15.** Записать в стандартном виде число:

1) $0{,}000321$; 2) $0{,}000074$; 3) $31\frac{2}{5}$; 4) $1401\frac{3}{25}$.

**16.** Доказать, что выражение:

1) $7 + a - (3b - a - (2b - 2a)) + b$ принимает положительные значения при любых значениях $a$ и $b$;

2) $-(3m - (5n - (2m + n))) - 4n - 1 + 5m$ принимает отрицательные значения при любых значениях $m$ и $n$.

**17.** Найти произведение многочленов:

1) $(8x - y^2)(3x + y^2)$; 2) $(2m^2n - 5mn^2)(3mn^2 - 4m^2n)$;

3) $(5xy^2 - 2x^2y)(2x^2y + 5xy^2)$; 4) $\left(\frac{1}{2}a^3 + b^2\right)\left(b^2 - \frac{1}{2}a^3\right)$;

5) $(a^6 - a^3b^3 + b^6)(a^3 + b^3)$; 6) $(9m^4 + 3m^2n^2 + n^4)(3m^2 - n^2)$.

**18.** Выполнить действия:

1) $\left(\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a^3 + b^3}\right) : \frac{a^2}{a^6 - b^6}$;

2) $\left(\frac{6a}{a^2 - 4b^2} + \frac{2}{2b - a} - \frac{4}{2b + a}\right) : \left(1 + \frac{a^2 + 4b^2}{4b^2 - a^2}\right)$;

3) $\left(\frac{y}{x^3 - x^2y + xy^2} + \frac{x - 2y}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}$.

# § 2. Линейные уравнения и системы уравнений

## 1. Линейные уравнения

*Уравнение с одним неизвестным* — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

*Корень уравнения* — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 2 является корнем уравнения $5x - 3 = x + 5$, так как $5 \cdot 2 - 3 = 2 + 5$ — верное равенство; число $-1$ не является корнем уравнения $5x - 3 = x + 5$, так как $5 \cdot (-1) - 3 = -1 + 5$ — неверное равенство.

*Решить уравнение* — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

*Линейное уравнение* — уравнение вида $ax = b$, где $a$ и $b$ — заданные числа, $x$ — неизвестное.

При $a \neq 0$ линейное уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$; при $a = 0$ и $b \neq 0$ уравнение не имеет корней; при $a = 0$ и $b = 0$ корнем является любое действительное число.

Основные свойства уравнений

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

**Задача 1.** Решить уравнение:

1) $7x - 5 = 4x - 20$; 2) $3(x + 3) - 3 = 14 + 3(x - 2)$;

3) $\frac{x-1}{2} - \frac{3-x}{3} = x - \frac{x+9}{6}$.

▷ 1) $7x - 5 = 4x - 20$,
$7x - 4x = -20 + 5$,
$3x = -15$,
$x = -5$.

2) $3(x + 3) - 3 = 14 + 3(x - 2)$,
$3x + 9 - 3 = 14 + 3x - 6$,
$3x + 6 = 3x + 8$,
$3x - 3x = 8 - 6$,
$0 \cdot x = 2$, корней нет.

3) $\frac{x-1}{2} - \frac{3-x}{3} = x - \frac{x+9}{6} \Big| \cdot 6$.
$3(x - 1) - 2(3 - x) = 6x - (x + 9)$,
$3x - 3 - 6 + 2x = 6x - x - 9$,
$5x - 9 = 5x - 9$, $5x - 5x = -9 + 9$,
$0 \cdot x = 0$, это равенство верно при любом значении $x$.

Ответ. 1) $x = -5$; 2) уравнение не имеет корней; 3) $x$ — любое число. ◀

Определение модуля числа $a$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить уравнение $|3 - 2x| = 5$.

▷ По определению модуля числа имеем $3 - 2x = \pm 5$.

Таким образом, либо $3 - 2x = 5$, откуда $x = -1$, либо $3 - 2x = -5$, откуда $x = 4$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. ◀

**Задача 3.** Решить уравнение $2(x - 3) = (5 - a)\,x + 6$, где $x$ — неизвестное.

▷ $2(x - 3) = (5 - a)x + 6$, $2x - 6 = 5x - ax + 6$, $2x - 5x + ax = 6 + 6$, откуда $(a - 3)x = 12$;

1) если $a \neq 3$, то $x = \frac{12}{a-3}$; 2) если $a = 3$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 12$, а это уравнение не имеет корней.

Ответ. $x = \frac{12}{a-3}$, если $a \neq 3$; нет корней, если $a = 3$. ◀

**Задача 4.** Решить уравнение $m(x - 2) = n - x$, где $x$ — неизвестное.

▷ $mx - 2m = n - x$, $mx + x = n + 2m$, $(m + 1)x = n + 2m$;

1) если $m \neq -1$, то $x = \frac{n+2m}{m+1}$; 2) если $m = -1$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = n - 2$, тогда при $n = 2$ корнем уравнения будет любое число, при $n \neq 2$ уравнение не имеет корней.

Ответ. $x = \frac{n+2m}{m+1}$, если $m \neq -1$ и $n$ — любое число; $x$ — любое число, если $m = -1$ и $n = 2$; нет корней, если $m = -1$ и $n \neq 2$. ◀

Решение практической (текстовой) задачи содержит три этапа:
1) по условию задачи составляется математическая модель задачи — уравнение (неравенство, система уравнений или неравенств);
2) решается составленное уравнение (неравенство, система);
3) найденные значения неизвестного соотносится со смыслом задачи и записывается ответ.

**Задача 5.** Лодка плыла по течению реки 2 ч, затем 4 ч против течения. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если против течения реки лодка прошла на 2 км больше, чем по течению.

▷ 1) Пусть $x$ км/ч — скорость лодки в стоячей воде, тогда $(x+3)$ км/ч — скорость лодки по течению, а $(x-3)$ км/ч — скорость лодки против течения реки. По течению реки лодка прошла $2\cdot(x+3)$ км, а против течения реки — $4\cdot(x-3)$ км. Так как расстояние, пройденное лодкой против течения реки, на 2 км больше, чем пройденное по течению, то $4(x-3)-2(x+3)=2$.

2) Решим составленное уравнение:

$4x-12-2x-6=2,\quad 4x-2x=2+12+6,\quad 2x=20,\quad x=10.$

3) $x=10$ км/ч не противоречит смыслу задачи.

Ответ. 10 км/ч. ◀

**Задача 6.** Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором — 40%. В сплаве этих двух слитков содержание меди 30%. Найти массу полученного сплава.

▷ Исследование условия задачи представлено в таблице:

| | Процентное содержание меди, выраженное в десятичных дробях | Масса слитка, кг | Масса меди в слитке, кг |
|---|---|---|---|
| I слиток | 0,1 | $x$ | $0{,}1x$ |
| II слиток | 0,4 | $x+3$ | $0{,}4(x+3)$ |
| Сплав | 0,3 | $x+(x+3)=$ $=2x+3$ | $0{,}3(2x+3)$ |

По данным таблицы запишем уравнение:

$$0{,}1x+0{,}4(x+3)=0{,}3(2x+3).$$

Решим это уравнение:

$$0{,}1x+0{,}4x+1{,}2=0{,}6x+0{,}9,$$
$$0{,}1x+0{,}4x-0{,}6x=0{,}9-1{,}2,\quad -0{,}1x=-0{,}3,\quad x=3.$$

При $x=3$ масса сплава равна $2\cdot3+3=9$ (кг).
Ответ. 9 кг. ◀

## 2. Системы уравнений с двумя неизвестными

*Уравнение первой степени с двумя неизвестными* — это уравнение вида

$$ax + by = c,$$

где $x$ и $y$ — неизвестные, $a$, $b$ и $c$ — заданные числа, причём хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ не равно нулю (т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$).

Числа $a$ и $b$ называют коэффициентами при неизвестных $x$ и $y$ соответственно, а число $c$ — свободным членом.

*Решение уравнения с двумя неизвестными $x$ и $y$* — упорядоченная пара чисел ($x$; $y$), при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство.

*Решить уравнение* с двумя неизвестными — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Например, пара чисел (–6; 5) является решением уравнения $\frac{1}{2}x + 2y = 7$, так как $\frac{1}{2}\cdot(-6) + 2\cdot 5 = 7$ — верное числовое равенство.

<u>**Задача 7.**</u> Решить уравнение $2x - 3y = 5$.

▷ I способ.
Выражаем $y$ через $x$:

$$-3y = 5 - 2x,\ y = \frac{2x-5}{3}.$$

Ответ. Пары чисел $\left(x; \frac{2x-5}{3}\right)$, где $x$ — любое число.

II способ.
Выражаем $x$ через $y$:

$$2x = 5 + 3y,\ x = \frac{3y+5}{2}.$$

Ответ. Пары чисел $\left(\frac{3y+5}{2}; y\right)$, где $y$ — любое число.

Оба способа решения приводят к описанию одного и того же множества точек координатной плоскости, расположенных на прямой $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. ◀

<u>**Задача 8.**</u> Сколькими способами можно полностью истратить 104 р. на покупку сувениров двух видов, цена которых 6 р. и 10 р.?

▷ Предположим, что куплено $x$ сувениров по 6 р. и $y$ сувениров по 10 р. За них заплатили ($6x + 10y$) р. Так как стоимость покупки 104 р., то $6x + 10y = 104$. Выразив $y$ через $x$, получим $y = \frac{104 - 6x}{10}$.

Так как $x$ и $y$ — целые неотрицательные числа, то число $104 - 6x$ должно делиться на 10, поэтому число $x$ может принимать лишь значения 4; 9; 14. Это означает, что сделать нужную покупку можно лишь тремя способами. ◀

*Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными* — это система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $x$ и $y$ — неизвестные; $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ — заданные числа, причём $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

*Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными* — пара чисел $x$ и $y$, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

*Решить систему уравнений* — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

**Задача 9.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ *способом подстановки.*

▷ Из первого уравнения системы $x = 7 - 5y$.

Подставим выражение $7 - 5y$ вместо $x$ во второе уравнение: $3(7 - 5y) - 2y = 4$. Решим полученное уравнение:

$21 - 15y - 2y = 4$, $-15y - 2y = 4 - 21$, $-17y = -17$, $y = 1$. Подставив $y = 1$ в равенство $x = 7 - 5y$, получим $x = 7 - 5 \cdot 1 = 2$.

Ответ. $x = 2$, $y = 1$. ◀

**Задача 10.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ *способом сложения.*

▷ $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 2x + y = 3 \quad \big| \cdot (-2) \end{cases}$ $\qquad + \begin{array}{r} 4x + 3y = 5 \\ -4x - 2y = -6 \\ \hline y = -1. \end{array}$

Подставим $y = -1$ во второе уравнение системы:

$$2x + (-1) = 3,\ 2x = 4,\ x = 2.$$

Ответ. $x = 2$, $y = -1$. ◀

**Задача 11.** Двое рабочих изготовили вместе 850 деталей. Первый работал 10 дней, а второй — 9 дней. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий за день, если первый рабочий за 4 дня изготавливал на 10 деталей больше, чем второй за 3 дня?

▷ Введём обозначения: $x$ — количество деталей, которые изготавливал первый рабочий за день, $y$ — количество деталей, которые изготавливал второй рабочий за день. Тогда первый рабочий сделал $10x$ деталей, второй — $9y$ деталей. По условию задачи вместе они сделали 850 деталей, т. е. $10x + 9y = 850$.

Далее по условию задачи: за 4 дня первый рабочий изготовил $4x$ деталей, что на 10 деталей больше, чем те $3y$ деталей, которые изготовил второй рабочий за 3 дня: $4x - 3y = 10$.

Полученные уравнения образуют систему, которую решим способом сложения:

$$\begin{cases} 10x + 9y = 850, \\ 4x - 3y = 10 \quad \big| \cdot 3 \end{cases} \qquad + \begin{array}{r} 10x + 9y = 850 \\ 12x - 9y = 30 \\ \hline 22x \qquad = 880 \\ x = 40. \end{array}$$

Подставим $x = 40$ во второе уравнение системы: $4 \cdot 40 - 3y = 10$. Получим $160 - 3y = 10$, $-3y = 10 - 160$, $-3y = -150$, $y = 50$.

Ответ. 40 и 50 деталей. ◀

## Упражнения

Решить уравнение (**19—21**).

**19.** 1) $0,2x-7=-0,3(x+4)$; 2) $4x-2(x-1,5)=3,5-3\left(\frac{1}{2}-x\right)$;

3) $x(x+2)=x^2+5(x-6)$; 4) $3x-2x(x-1)=2(7-x^2)$.

**20.** 1) $\frac{3-x}{6}+2=\frac{2-x}{3}-\frac{2x+1}{4}$; 2) $x-\frac{1-x}{4}+\frac{2x-3}{10}=\frac{x+3}{5}$.

**21.** 1) $x:4\frac{1}{3}=8:17\frac{1}{3}$; 2) $0,37:2\frac{5}{6}=x:8,5$.

**22.** От пристани $A$ до пристани $B$ катер плывёт по реке 15 мин, а обратно — 20 мин. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 14 км/ч.

**23.** Автобус, выехавший из посёлка в город в 8 ч со скоростью 60 км/ч, на полпути встретился с выехавшим в 8 ч 20 мин из города в посёлок автомобилем, скорость которого 80 км/ч. Найти расстояние между посёлком и городом.

**24.** Выяснить, какая из пар чисел (2; 3), (–1; 4), (2; 7) является решением уравнения $-3x+y=1$.

**25.** Решить способом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x+5y=28,\\5x+y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-y=-1,\\2x-3y=11.\end{cases}$

**26.** Решить способом сложения систему уравнений:

1) $\begin{cases}3x-8y=-9,\\-5x+2y=19;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-4x+6y=1,\\3x-8y=-6.\end{cases}$

**27.** В книге, которую Катя прочитала за 5 дней, было на 20 страниц больше, чем в книге, которую Настя прочитала за 4 дня. Сколько страниц в день читала каждая девочка, если в двух книгах вместе 580 страниц?

**28.** Если к половине первого числа прибавить треть второго числа, то получится 1, а если первое число сложить с удвоенным вторым, то получится 26. Найти эти числа.

**29.** Контролёр планировал проверить партию приборов за 5 ч. Однако за час он смог проверить на 13 приборов меньше, чем запланировал, поэтому после 6 ч работы ему осталось проверить ещё 30 приборов. Сколько приборов было в партии?

**30.** В первом словарном диктанте Антон написал правильно 90% слов. Во втором диктанте было на 40 слов больше, чем в первом, а правильно Антон написал 95% слов. Сколько слов было в каждом диктанте, если всего 7% слов из этих двух диктантов Антон написал неправильно?

**31.** Решить уравнение:

1) $3x-2y=1$; 2) $-4x+3y=-2$.

**32.** Пятьдесят рабочих нужно разделить на бригады, в каждой из которых будет либо 6, либо 8 человек. Сколько бригад может получиться при таком делении?

**33.** Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 3y = 5 - 0{,}2x - 20y, \\ 0{,}5x - y - 2 = 2 - x - 20y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 = 1 - x + 2y, \\ 14x - 5 = 9x - 3y - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 3y = -2, \\ -8x + y = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 1{,}5, \\ 0{,}5x - 2y = 4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - 3y = -3, \\ -10x - 6y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 10x + 3y = 0{,}1, \\ 7x - 2y = 1{,}3. \end{cases}$

**34.** Решить уравнение:

1) $|x| = 1{,}5$; 2) $|5x| = 8$; 3) $5|x| = \frac{1}{3}$;

4) $|x - 1| = 2$; 5) $|2 - x| = 7$; 6) $|2x - 4| = 6$.

**35.** При каком значении $a$ уравнение:

1) $(5 - 2a)x = a$; 2) $ax + 3 - 2x = 3$

имеет только один корень?

**36.** При каких значениях $a$ уравнение:

1) $(2a - 3)x = a + 1$; 2) $(4 - 5a)x = 3 - a$

не имеет корней?

**37.** Установить, при каком значении $a$ любое число является корнем уравнения:

1) $7x + 2 - ax = 2(x + 1)$; 2) $(3 - a)x + 4x = 2 - 5x$.

**38.** Решить уравнение, в котором $a$ и $b$ — некоторые числа, $x$ — неизвестное:

1) $a(x - 5) = 2x - 3$; 2) $3(x - a) = 21 + 3x$;
3) $2(ax - 3) = 3x - 6$; 4) $2ax = b - 1$;
5) $3 - bx = a$; 6) $5b = a(x + 2)$;
7) $2a = b(x + 2)$; 8) $3(x + b) = 2(ax - 6)$.

**39.** Найти все значения $a$, при которых система уравнений:

1) $\begin{cases} 5x + ay = 40, \\ 2x + 3y = 4a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3ay = 5a, \\ 3x - (5a - 1)y = 7a + 1 \end{cases}$

не имеет решений.

**40.** Найти все значения $a$, при которых система уравнений:

1) $\begin{cases} x + (a - 1)y = a, \\ 5x + (3a + 1)y = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - (a + 1)y = 2a, \\ ax - 6y = 8 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений. Найти эти решения.

**41.** 1) Бригада должна была выполнить заказ за 25 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 7 деталей, бригада за 20 дней перевыполнила план на 35 деталей. Сколько деталей в день изготавливала бригада?

2) Заказ по производству сейфовых дверей цех должен был выполнить за 28 дней. Однако уже за день до срока цех не только выполнил заказ, но и изготовил сверх заказа одну дверь, так как делал на две двери в день больше. Сколько дверей цех планировал выпускать ежедневно?

**42.** 1) Два велосипедиста выехали в одном направлении, причём первый на полчаса раньше второго. Первый велосипедист проезжает за час 14 км, а второй — за 1,5 ч 18 км. Через какое время с момента выезда второго велосипедиста расстояние между ними будет 13 км?

2) Из посёлка в город выехал велосипедист, а через 2 ч 40 мин вслед за ним выехал автомобиль. На каком расстоянии от посёлка автомобилист догонит велосипедиста, если скорость первого 12 км/ч, а второго 60 км/ч?

**43.** 1) Из двух городов, расстояние между которыми 620 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного поезда на 10 км/ч меньше скорости другого. Найти скорости поездов, если через 3 ч после начала движения расстояние между ними сократилось до 170 км.

2) Из города $A$ в город $B$, расстояние между которыми 905 км, выехал автомобиль. Через час из города $B$ в город $A$ по той же автостраде навстречу ему выехал другой автомобиль со скоростью, на 5 км/ч большей. Определить скорости автомобилей, если известно, что через 4 ч после начала движения второго автомобиля расстояние между ними сократилось до 120 км.

**44.** 1) Мать старше дочери на 24 года, а через 5 лет будет старше её в 5 раз. Сколько лет матери и сколько лет дочери?

2) Отец старше сына в 3 раза. Вместе отцу и сыну 52 года. Сколько лет каждому из них?

# § 3. Числовые неравенства и неравенства первой степени с одним неизвестным

## 1. Числовые неравенства

Число $a$ больше числа $b$ (пишут $a > b$), если разность $a - b$ положительна. На числовой оси в этом случае точка $a$ расположена правее точки $b$ (рис. 1).


*Рис. 1*

Число $a$ меньше числа $b$ (пишут $a < b$), если разность $a - b$ отрицательна. На числовой оси в этом случае точка $a$ расположена левее точки $b$ (рис. 2).


*Рис. 2*

Очевидно, что если $a > b$, то $b < a$, а если $a < b$, то $b > a$.

**Задача 1.** Доказать, что $-\frac{7}{8} > -0{,}9$.

▷ Нужно доказать, что $-\frac{7}{8} - (-0{,}9) > 0$.

Вычислим: $-\frac{7}{8} - (-0{,}9) = -0{,}875 + 0{,}9 = 0{,}025$.

$0{,}025 > 0$, значит, $-\frac{7}{8} - (-0{,}9) > 0$, откуда $-\frac{7}{8} > -0{,}9$. ◀

Свойство 1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $c < b$ и $b < a$, то $c < a$ (рис. 3).

Рис. 3

Например, если $x - 3 > y$ и $y > 0$, то (по свойству 1) $x - 3 > 0$.

Свойство 2. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то знак неравенства не изменится.

Например, если к обеим частям верного неравенства $5 > 2$ прибавить $-2$, то получится верное неравенство $3 > 0$.

Следствие. Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

**Задача 2.** Доказать, что если $(x + 3)^2 < (x + 2)(x + 3)$, то $x < -3$.

▷ Выполнив действия в левой и правой частях неравенства, получим $x^2 + 6x + 9 < x^2 + 5x + 6$. Перенесём члены, содержащие $x$, из правой части неравенства в левую, а члены, не содержащие $x$, из левой части в правую, поменяв при этом знаки переносимых членов на противоположные:

$$x^2 + 6x - x^2 - 5x < 6 - 9.$$

После приведения подобных слагаемых в каждой части неравенства получим $x < -3$, что и требовалось доказать. ◀

Свойство 3. Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.
Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Например, если обе части верного числового неравенства $-12 < 4$ разделить на 4, то получим верное неравенство того же знака $-3 < 1$. Если обе части неравенства $-12 < 4$ умножить на $-2$, то получим неравенство $24 > -8$ (также являющееся верным).

**Задача 3.** Пусть $x > y$ и $xy < 0$. Доказать, что $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

▷ Разделим обе части неравенства $x > y$ на отрицательное число $xy$ (знак неравенства поменяется на противоположный):

$$\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}, \text{ откуда } \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \text{ или } \frac{1}{x} > \frac{1}{y}. ◀$$

Свойство 4. Неравенства одинакового знака можно почленно складывать, при этом получается неравенство того же знака.

Например: $+\begin{array}{r} -2<5 \\ 6<12 \\ \hline 4<17 \end{array}$ $\qquad +\begin{array}{r} a^2>1 \\ b>-1 \\ \hline a^2+b>0. \end{array}$

Свойство 5. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака.

Например: $\times\begin{array}{r} 0{,}5>0{,}1 \\ 8>3 \\ \hline 4>0{,}3 \end{array}$ $\qquad \times\begin{array}{r} 5<a \\ 1<b \\ \hline 5<ab. \end{array}$

**Задача 4.** Пусть $a>5$, $b<7$. Доказать, что $a^2-3b>4$.

▷ 1) $\times\begin{array}{r} a>5 \\ a>5 \\ \hline a^2>25; \end{array}$ 2) $b<7 \,|\cdot(-3)$ $-3b>-21;$ 3) $+\begin{array}{r} a^2>25 \\ -3b>-21 \\ \hline a^2-3b>4. \end{array}$ ◀

**Задача 5.** Ширина прямоугольника больше 5 см, длина — в 3 раза больше ширины. Доказать, что периметр прямоугольника больше 40 см.

▷ Пусть $a$ — ширина прямоугольника, тогда $3a$ — его длина. Периметр прямоугольника $P=2(a+3a)=8a$. По условию $a>5$, тогда $8a>5\cdot 8$, $8a>40$, т. е. $P>40$ (см). ◀

Нестрогое неравенство $a \geqslant b$ означает, что $a>b$ или $a=b$. Например, записывают: $3\geqslant 2$; $2\geqslant 2$.

## 2. Решение неравенств и их систем

*Решением неравенства с одним неизвестным* называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, $x=2$ является решением неравенства $x+3>1$, так как $2+3>1$ — верное числовое неравенство.

*Решить неравенство* — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Для решения неравенства первой степени с одним неизвестным нужно:
1) перенести с противоположными знаками члены, содержащие неизвестное, из правой части в левую, а не содержащие неизвестное — из левой части в правую;
2) привести подобные члены в левой и правой частях неравенства;
3) если коэффициент при неизвестном отличен от нуля, то разделить на него обе части неравенства.

**<u>Задача 6.</u>** Решить неравенство $\frac{1}{2}x - 2 \leqslant 2x + 1$.

▷ $\frac{1}{2}x - 2x \leqslant 1 + 2$, $-\frac{3}{2}x \leqslant 3 \Big| : \left(-\frac{3}{2}\right)$, $x \geqslant -2$. ◀

**<u>Задача 7.</u>** Доказать, что неравенство $3x - 2 \geqslant 3(x + 2) - 5$ не имеет решений.

▷ Упростим правую часть неравенства:
$3x - 2 \geqslant 3x + 6 - 5$, $3x - 2 \geqslant 3x + 1$, откуда $3x - 3x \geqslant 1 + 2$, $0 \cdot x \geqslant 3$.

Последнее неравенство не имеет решений, так как $0 \cdot x = 0$ при любом $x$, а неравенство $0 \geqslant 3$ неверно. ◀

<u>Знаки произведения (частного)</u>

$ab > 0 \left(\frac{a}{b} > 0\right)$, когда либо $a > 0$, $b > 0$, либо $a < 0$, $b < 0$.

$ab < 0 \left(\frac{a}{b} < 0\right)$, когда либо $a > 0$, $b < 0$, либо $a < 0$, $b > 0$.

**<u>Задача 8.</u>** Решить неравенство $\frac{-12}{0{,}4x + 3} < 0$.

▷ Так как числитель дроби отрицателен, то дробь отрицательна при положительном знаменателе, т. е. $0{,}4x + 3 > 0$, откуда

$$0{,}4x > -3 \,\Big|\, : 0{,}4,$$
$$x > -7{,}5. \text{ ◀}$$

*Решение системы неравенств с одним неизвестным* — это значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, $x = 3$ является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ -x + 4 < 3x, \end{cases}$$

так как и $2 \cdot 3 - 5 \geqslant 0$, и $-3 + 4 < 3 \cdot 3$ — верные числовые неравенства.

*Решить систему неравенств* — это значит найти все решения системы или установить, что их нет.

**<u>Задача 9.</u>** Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 8x - 3 > 6(x + 2), \\ 3(x - 2) < 4x + 1. \end{cases}$$

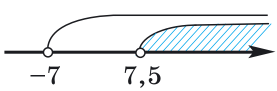


*Рис. 4*

▷ Решим первое неравенство системы:

$8x - 3 > 6x + 12$, $8x - 6x > 12 + 3$, $2x > 15$, $x > 7{,}5$.

Решим второе неравенство системы:

$$3x - 6 < 4x + 1, \; 3x - 4x < 1 + 6,$$
$$-x < 7, \; x > -7.$$

Оба неравенства системы верны при $x > 7{,}5$ (рис. 4). ◀

**Задача 10.** Решить неравенство $|2x - 5| < 3$.

▷ Данное неравенство означает то же, что и двойное неравенство $-3 < 2x - 5 < 3$. Прибавив 5 к каждой части этого неравенства, получим $2 < 2x < 8$, откуда делением на 2 каждой части неравенства найдём $1 < x < 4$. ◀

**Задача 11.** Решить неравенство $|2x - 5| \geqslant 3$.

▷ Данное неравенство выполняется, когда $2x - 5 \geqslant 3$ или когда $2x - 5 \leqslant -3$, т. е. при $x \geqslant 4$, а также при $x \leqslant 1$. ◀

## Упражнения

**45.** Выяснить, положительным или отрицательным является число $c$, если:

1) $c > b$, а $b > 1$; 2) $c < b$, а $b < -3$.

**46.** Доказать, что если $x^2 - 3x + 5 > (x - 2)^2$, то $x > -1$.

**47.** Доказать, что:

1) $x > 5$, если $5x > 25$; 2) $x < 3$, если $-x > -3$;

3) $x^2 > -2x$, если $x < -2$; 4) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, если $x < y$ и $xy > 0$.

**48.** Известно, что $x > 3$, $y < 8$. Доказать, что $2x^3 - y > 46$.

**49.** Длина прямоугольника меньше 12 см, а ширина — в 2 раза меньше длины. Доказать, что площадь прямоугольника меньше 100 см$^2$.

**50.** Решить неравенство:

1) $3x - 8 > 5x + 1$; 2) $25(x - 1) \leqslant 6(5x - 6)$.

**51.** Найти наименьшее целое $n$, удовлетворяющее неравенству:

1) $n > -3$; 2) $n > 0$; 3) $n \geqslant 2$; 4) $n \geqslant -5$.

**52.** Найти наименьшее целое число, являющееся решением неравенства $15 - 2(x + 2) < x - 10$.

**53.** Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 5 - x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}2 + x \leqslant 0, \\ -5x + 2 < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + 1 > 0, \\ 2 - \frac{1}{3}x \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 1{,}4x + 7 \leqslant 0, \\ 0{,}3 - 2x \geqslant 0. \end{cases}$

**54.** Доказать, что если:

1) $5x - 8b > 1{,}2a - 4{,}2b$, то $a > b$;

2) $(a + 3)(2 - a) \leqslant (5 - a)(a + 3)$, то $a \geqslant -3$.

**55.** Доказать, что если $x > 2$, $y > 4$, то:

1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} > 2$; 2) $2xy > 16$; 3) $-\frac{xy}{2} < -4$; 4) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{3}{4}$.

**56.** Показать, что решением неравенства $3x - 2 < 3(x + 2) - 5$ является любое число.

**57.** Найти наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $\frac{3x-1}{2} + \frac{2x+1}{3} < 2$;  2) $\frac{1-4x}{6} - \frac{2-3x}{4} < -1$.

**58.** Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-5 > x-7, \\ x+4 < 2(x+1); \end{cases}$  2) $\begin{cases} 4(x+1) < 3(x+2)+1, \\ -2x+1 \leqslant 1-7x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}5x+3 \leqslant -1{,}5x, \\ 5(2-x) < 3(1-x)+3; \end{cases}$  4) $\begin{cases} 0{,}3x+0{,}1 \geqslant 0{,}2x-0{,}1, \\ 6(x+2) > 7x+8. \end{cases}$

**59.** Найти все целые решения системы $\begin{cases} \frac{x-2}{5} \geqslant \frac{x-3}{6}, \\ 5x-1 < 3(x+1). \end{cases}$

**60.** Решить неравенство:

1) $\frac{-21}{5-6x} > 0$;  2) $\frac{0{,}8x-2}{x^2+1} < 0$.

**61.** Решить уравнение:

1) $|5x - 1| = 0$;  2) $|0{,}5x + 3| = 1$;  3) $|x + 2| = -2$;
4) $|7 - x| = -0{,}1$;  5) $|3x - 5| = 1$;  6) $|1 - 2x| = 5$.

Решить неравенство **(62—63)**.

**62.** 1) $|3x + 1| \leqslant 7$;  2) $|2 - x| < 3$;
3) $|2x - 3| > 1$;  4) $|1 - x| \geqslant 4$.

**63.** 1) $|x - 4| \geqslant -3$;  2) $|x - 4| < -3$.

**64.** Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3x-4 < x+1, \\ -5x+1 < 7+x, \\ \frac{1}{4}x-1 \leqslant \frac{3}{4}x-1; \end{cases}$  2) $\begin{cases} 12x+5 \geqslant 7x+2, \\ 0{,}1x-2 < 0{,}2x-1, \\ 6x+3 < 6-4x. \end{cases}$

**65.** В треугольнике длины сторон равны $a$, $b$ и $c$. Медиана, проведённая к стороне $c$, равна $m$. Доказать, что $m < \frac{a+b+c}{2}$.

# § 4. Линейная функция

## 1. Понятие функции

Если каждому значению $x$ из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по определённому правилу число $y$, то говорят, что на этом множестве задана функция.

При этом $x$ называют *независимой переменной* или *аргументом*, а $y$ — *зависимой переменной* или *функцией*.

Зависимость переменной $y$ от переменной $x$ называют *функциональной зависимостью*. Записывают: $y = y(x)$.

Функция может быть задана *формулой* (аналитически). Например, $y(x) = x^3 - x + 1$. Для такой функции можно найти её значение для любого значения аргумента. К примеру,

$$y(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1;$$
$$y(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5.$$

**Задача 1.** Найти значение $x$, при котором значение функции $y = \frac{1}{2}(3x - 1)$ равно $-5$.

▷ $-5 = \frac{1}{2}(3x - 1)$, $-5 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}x = -5 + \frac{1}{2}$,

$\frac{3}{2}x = -\frac{9}{2}$, $x = -3$. ◀

Функция $y(x)$ может быть задана *таблицей*. Например:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)$ | 1 | 3 | 5 | 9 | 13 | 19 | 21 |

По таблице можно определить, в частности, что: 1) $y(4) = 9$; 2) функция $y(x)$ принимает значение, равное 21, при $x = 10$.

*График функции* $y = y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y(x))$.

Например, на рисунке 5 функция $y = y(x)$ задана графиком.

С помощью графика функции можно выяснить многие свойства функции («прочитать» график функции). Например, по рисунку 5 можно:

1) найти значения функции при конкретных значениях $x$: $y(-4) = 2$, $y(0) = -3$, $y(4) = 0$;

2) определить, при каких значениях $x$ значение функции $y(x)$ равно конкретному числу, например $y(x) = 2$ при $x = -4$, $x = 5{,}5$, $x = 9$;

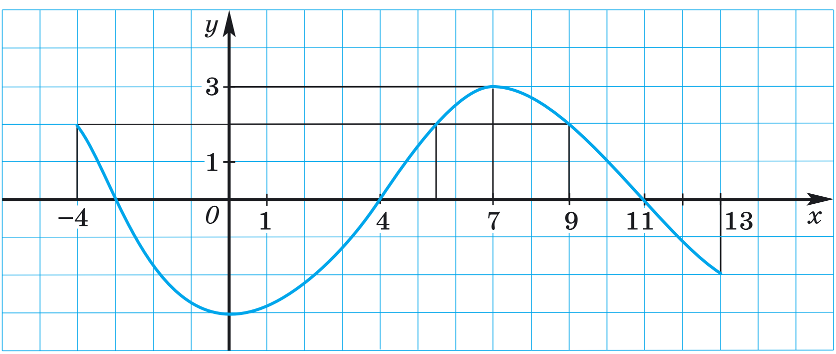


*Рис. 5*

3) определить промежутки знакопостоянства функции: $y > 0$ при $-4 \leqslant x < -3$ и при $4 < x < 11$; $y < 0$ при $-3 < x < 4$ и при $11 < x \leqslant 13$.

## 2. Линейная функция

*Линейная функция* — это функция вида $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — заданные числа.

График линейной функции $y = kx + b$ — прямая. При $b = 0$ функция принимает вид $y = kx$, её график проходит через начало координат.

*Прямая пропорциональная зависимость* — это зависимость вида $y = kx$, где $k > 0$, $x > 0$ ($k$ — коэффициент пропорциональности).

*Обратная пропорциональная зависимость* — это зависимость вида $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$ ($k$ — коэффициент пропорциональности).

**Задача 2.** Построить график функции $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

▷ Заполним таблицу:

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | –1 |

На координатной плоскости (рис. 6) отметим две точки (0; 1) и (4; –1). Через них проведём прямую, которая и будет графиком заданной функции. ◀

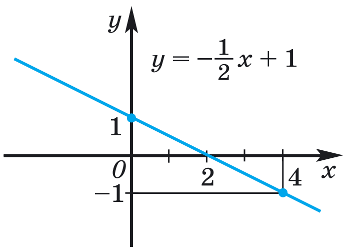


*Рис. 6*

**Задача 3.** Не строя графика функции $y = 2x + 3$, найти координаты точек пересечения его с осями координат.

▷ 1) $y(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$; 2) $0 = 2 \cdot x + 3$, откуда $x = -1{,}5$.

Ответ. (0; 3) и (–1,5; 0). ◀

**Задача 4.** Не строя графика функции $y = -\frac{1}{2}x + 5$, определить, какая из точек $P(4;\ 3)$, $M(-4;\ 6)$ принадлежит графику этой функции.

▷ 1) Точка $P(4;\ 3)$ принадлежит графику функции $y = -\frac{1}{2}x + 5$, так как $3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 5$ — верное равенство.

2) Точка $M(-4;\ 6)$ не принадлежит графику функции $y = -\frac{1}{2}x + 5$, так как равенство $6 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 5$ неверное. ◀